

# La impedancia térmica de los cerramientos. Nuevo concepto que puede facilitar de forma considerable el ahorro energético.

Manuel Domínguez<sup>1</sup>, David García<sup>1</sup>

## RESUMEN

*Se define y analiza un nuevo concepto: la impedancia térmica, y se estudia la posibilidad de que su introducción en los cálculos teóricos, constituya un importante avance en la investigación de nuevos cerramientos para la construcción. Se ha visto que este concepto presenta enormes ventajas a la hora de profundizar en la comprensión del comportamiento de los muros y facilitar su diseño. Aún más importante es el hecho de que puede constituir un considerable medio de ahorro de energía y, con ello, contribuir a la deseada disminución de la contaminación medio ambiental.*

*Se muestran, en diversos ejemplos, las importantes diferencias que se observan en el estudio de los cerramientos, cuando éste se realiza en régimen variable, al que van a estar sometidos en la realidad, con respecto al régimen permanente convencional. También se estudia la importancia de la posición relativa del aislamiento en los muros externos de las edificaciones.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde que el hombre utilizó las cuevas para defenderse de las inclemencias del clima, para la crianza de sus vinos o la conservación de sus alimentos, ha venido aprovechando la inercia térmica de su entorno. Es bien sabido que, cuando se dispone de un espesor de tierra considerable, el calor no entra en las bodegas y la temperatura en ellas se mantiene prácticamente constante y muy próxima a la temperatura media de la zona. Esto es debido a que la **impedancia térmica** que presentan las paredes de las cuevas es tan grande, que atenúa y filtra la onda térmica ambiental hasta rectificarla casi en su totalidad.

Los cerramientos se pueden considerar como sistemas que, a parte de su complejión térmica de aislantes, desfasan, filtran y aplanan las ondas térmicas. Las perturbaciones térmicas debidas a una ráfaga de viento o al paso de una nube que oculta los rayos solares, son retenidas por cualquier cerramiento que actúa de filtro para las grandes frecuencias. Sin embargo, se requieren cerramientos muy inerciales para hacer lo mismo con las ondas diarias u olas de calor y frío de varios días, las que son de verdad muy temidas por los buenos diseñadores de climatización<sup>2</sup>.

El conseguir desfasar la onda anual tres meses, de forma similar a como se ha conseguido desfasar 12 horas la diurna con los mejores cerramientos que se emplean en la actualidad, no es una utopía, sólo es cuestión de plantearse. El que sea rentable y, por lo tanto, con-

<sup>1</sup> Instituto del Frío (C.S.I.C.). C/ Ramiro de Maeztu s/n. Ciudad Universitaria - 28040 Madrid

<sup>2</sup> Como se demostrará más adelante, los cerramientos atenúan fuertemente las altas frecuencias térmicas, permitiendo el paso fácil de las bajas (lo que se conoce en electrónica como "filtro pasa-bajas"). La magnitud que rige el grado de atenuación de una onda variable es el producto Resistencia térmica x Capacidad calorífica del cerramiento.

veniente desde el punto de vista económico, puede ser otro tema. Creemos que deberá estudiarse el problema teniendo en cuenta los diversos factores que intervienen, tales como: Contaminación, políticas energéticas, grado de desarrollo... (1,2,3,4)

## 2. IMPEDANCIA TÉRMICA. METODOLOGÍA

El paralelismo entre los campos térmicos y eléctricos es un hecho constatado hace muchos años, y la analogía eléctrica se ha venido convirtiendo en una importante herramienta de cálculo para el estudio y resolución de los problemas térmicos (Bibliografía 5,6). Es ciertamente curioso como desde un principio se asimiló mejor el campo térmico que el eléctrico y, paradójicamente, como se ha desarrollado más este último, en particular en las aplicaciones de la corriente alterna. Tal situación ha estado en parte motivada por el gran avance que ha protagonizado la electrónica desde la revolución industrial de principio de siglo. Precisamente en sus estudios se emplea el concepto de Impedancia que, como se recordará, es el coeficiente multiplicativo de la corriente ( $Z$ ), equivalente a la resistencia en la ley de Ohm, obtenido cuando resolvemos un circuito en régimen variable. La impedancia de un circuito está compuesta por una parte real y otra imaginaria: la parte real es la resistencia, que equivale a la conducción de calor en régimen permanente, y la ortogonal o imaginaria es la reactancia, función de la frecuencia, de la capacidad y/o de la inductancia (7).

En primera aproximación, un muro homogéneo se representa por el circuito de la siguiente figura

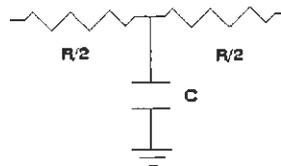


Figura 1. Simil elemental de un muro homogéneo compuesto por dos resistencias en serie y un condensador en paralelo.

Se ha visto (Anexo I) que la expresión del módulo y de la fase de la **impedancia térmica**, para una aproximación de 1<sup>o</sup> orden, en un muro elemental homogéneo de resistencia térmica  $R$  y capacidad térmica  $C$ , sometido a una onda térmica de frecuencia  $\omega$ , vienen dadas por:

$$|Z| = R \sqrt{1 + \left( \frac{\omega RC}{4} \right)^2} \quad [1]$$

$$\delta = \text{Arc tg} \left( \frac{\omega RC}{4} \right) \quad [2]$$

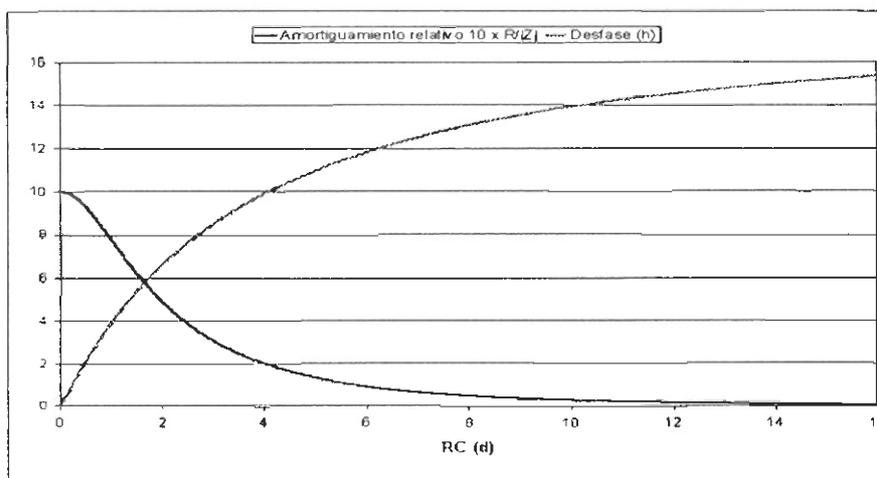


Figura 2. Amortiguamiento relativo y desfase de la onda en función del producto  $RC$ .

El empleo de las ecuaciones indicadas es sencillo y cómodo, pero presenta algunos inconvenientes o limitaciones por ser una primera aproximación de un muro homogéneo. El máximo valor de  $\delta$  que se obtiene mediante la ecuación es de 6 h. La razón se encuentra en que la parte real de  $Z$  no se hace negativa con un sólo elemento  $RC$ . Para muros pesados la impedancia puede encontrarse en cualquiera de los otros tres cuadrantes del plano complejo, por lo que para ellos debe aplicarse una aproximación de orden superior. En el Anexo I se recogen las expresiones obtenidas para una aproximación de 3<sup>er</sup> orden, y en la figura 2 se muestran los valores de  $R/|Z|$  y  $\delta$  en función de  $RC$ . Es de resaltar el papel importante que tiene  $R$ ,  $C$ ,  $\omega$  y sobre todo el producto  $RC$  que marca, en todo circuito eléctrico y aquí también, un tiempo característico del sistema<sup>3</sup>.

Un método de cálculo más versátil es la *Analogía Eléctrica Resuelta con ordenador* (8). El modelo AERO está basado en la resolución de las *leyes de Kirchhoff* en su extensión al campo térmico. Se ha comprobado en muchos ejemplos que la desviación de los resultados obtenidos respecto a la solución analítica es despreciable, y que se reducen en gran medida los problemas de convergencia respecto a otros métodos numéricos (9,10,11). La resolución del problema se convierte, en cada iteración, en la resolución de un sistema lineal con tantas ecuaciones como incógnitas. El error cometido disminuye al reducir el intervalo de tiempo en cada iteración del cálculo,  $\Delta t$ , y al aumentar el número de elementos de la malla,  $N$ , (*discretización del sistema*). Se entiende con ello que en cuantos más elementos  $R:C$  se divida una malla de resistencia  $R$  y capacidad  $C$ , el error cometido en el cálculo numérico será menor.

La razón de ésta ganancia en precisión se debe a la gran novedad del desarrollo del AERO, que consiste en sustituir las capacidades  $C$ , por resistencias  $R^*$ , según la relación de conversión:

$$R^* = \frac{\Delta t}{2 \cdot C}$$

En donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo de cálculo.

Como se puede ver en el Anexo I, el estudio teórico de la transmisión térmica en cerramientos reales *multicapa* puede convertirse en una tarea que requiera un gran esfuerzo, en lo que a análisis matemático se refiere (12), si lo que se pretende obtener es una solución exacta (13) o aproximada (14) del problema. En cambio, empleando técnicas de análisis numérico, como la analogía eléctrica resuelta por ordenador, se puede simular de un modo ágil el comportamiento en régimen variable de los cerramientos, sin que de ello se derive una merma, fuera de lo razonable, en la exactitud de los resultados. La metodología del modelo AERO empleado aquí, está recogida en el Anexo II.

### 3. DESCRIPCIÓN

En un primer ejemplo se emplean las ecuaciones teóricas y el método AERO en el estudio de la respuesta de cuatro muros susceptibles de ser caracterizados con el símil del *cerramiento homogéneo*, y cuyas propiedades térmicas se recogen en la tabla nº1. Ésta se analiza para ondas con períodos comprendidos entre 1 y 10 días. Se estudia la variación del módulo y la fase de la *impedancia térmica* en función de la frecuencia de la onda.

Se comparó el comportamiento térmico en régimen variable del muro de *Termoarcilla* de 29 cm con el de uno de los más empleados en la construcción española (Tabla nº3).

En el segundo ejemplo se aumenta la capacidad de los muros un 20%, reduciendo en la misma medida la resistencia, manteniendo constante<sup>4</sup> el producto  $RC$ . Aquí se pone de manifiesto la relación que existe entre el módulo y la fase de la impedancia y el producto  $RC$  del cerramiento.

<sup>3</sup> Se define el tiempo de acoplo de un cerramiento  $\tau = RC/4$  como el tiempo que transcurre hasta que desaparece el transitorio inicial, y empieza a predominar el efecto de la perturbación periódica (ver Anexo I).

<sup>4</sup> Si  $C_2 = 1.2 \cdot C_1$  y  $R_2 = R_1 / 1.2$ , de modo que  $\Delta R/R = 16.7\%$ ,  $RC$  permanece constante.

El tercer ejemplo constituye una nueva muestra de las posibilidades que nos brinda este potente método de cálculo, sobre todo en lo referente al análisis cualitativo del comportamiento térmico de los sistemas constructivos. Se modelizó un muro pesado y altamente resistivo, constituido por varios elementos cuyas propiedades físicas se recogen en la tabla nº2. La simulación se llevó a cabo primero con el aislante colocado en la cara interior del cerramiento. Una vez completado el cálculo se repitió la malla del sistema situando éste en la cara exterior, antes del elemento más pesado y capacitivo (Anexo II). Se pretende poner de manifiesto la *no conmutatividad* de los componentes elementales de los *muros multicapa* (15).

MURO DE TERMOARCILLA	Espesor (cm)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Resistencia (m <sup>2</sup> K/W)	Capacidad (kJ/m <sup>2</sup> K)	$\tau$ (h)
Nº1	14	980	0.820	143.4	8.2
Nº2	19	920	1.205	182.7	15.3
Nº3	24	890	1.587	223.2	24.6
Nº4	29	860	1.923	260.6	34.8

Tabla nº1: Propiedades térmicas de los cuatro cerramientos de arcilla homogéneos empleados en el análisis

COMPONENTES	Espesor (cm)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Resistencia (m <sup>2</sup> K/W)	Capacidad (kJ/m <sup>2</sup> K)
Aire exterior	--	--	0.060	--
Ladrillo macizo 1 pie	24	1800	0.276	596.01
Poliuretano expandido	4	40	1.737	1.34
Ladrillo hueco sencillo	4	1200	0.082	44.16
Enlucido de yeso	1.5	800	0.050	11.04
Aire interior	--	--	0.110	--
Total	33.5	1475	2.325	652.55

Tabla nº2: Propiedades térmicas del muro heterogéneo de 33 cm, utilizado en la simulación

COMPONENTES	Espesor (cm)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Resistencia (m <sup>2</sup> K/W)	Capacidad (kJ/m <sup>2</sup> K)
Aire exterior	--	--	0.060	--
Ladrillo macizo 1/2 pie	12	1800	0.138	298.08
Poliuretano expandido	4	40	1.737	1.34
Ladrillo hueco sencillo	4	1200	0.082	44.16
Enlucido de yeso	1.5	800	0.050	11.04
Aire interior	--	--	0.110	--
Total	21.5	1475	2.177	354.62

Tabla nº3: Propiedades térmicas del muro heterogéneo de 21,5 cm, utilizado en la simulación

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las figuras nº3 a nº6, se representa la respuesta de los 4 muros a la onda de 1 día, obtenida con el método analógico, para  $n = 40$ , y el analítico, para  $n = 1$  y 3, siendo  $n$  el orden de la aproximación.

En la figura nº7 se ha representado la variación con la frecuencia del módulo de la **impedancia térmica**. Se observa que la resistencia real varía mucho en cada uno de ellos, aumentando desde un factor de 2 para muros ligeros hasta un factor 11 para pesados, respecto a la resistencia en régimen permanente. En cuanto a la simulación por medio del método AERO, los resultados son algo más conservadores para muros pesados, siendo éste de un factor 6. Se observa, además, que la relación varía considerablemente con la frecuencia, tendiendo al valor permanente cuando el período de la onda es grande (frecuencias bajas). Esto es indicativo de que un cerramiento, de las características de los aquí analizados, filtrará en gran medida las ondas térmicas de frecuencia superior a  $1 \text{ día}^{-1}$ , mientras que aquéllas que se aproximen al régimen permanente sufrirán atenuación atendiendo sólo a la conductividad del muro (16).

En la figura nº8 se muestra el desfase en función del período de la onda. Se observa que el retraso en el flujo de calor, para una onda térmica de un día, varía entre 5 y 13 h, respectivamente para los muros más ligeros y los más pesados. Los muros nº3 y nº4 causarán un desfase en la onda térmica diaria del orden de 12 h, convirtiendo en tales condiciones sus máximos en valles térmicos, y viceversa. Las diferencias observadas entre los dos métodos disminuyen con el producto  $RC$  y con la frecuencia de la onda<sup>5</sup>.

En las figuras nº9 y nº10 se recogen, para la onda de un día, la impedancia y el desfase que se obtienen por ambos métodos. Las discrepancias observadas entre ellos son debidas a que en la obtención de las ecuaciones teóricas se utiliza un modelo de 3 elementos, siendo 40 el nº de elementos utilizados en la simulación AERO.

En las figuras nº11 y nº12 se comparan el módulo y la fase de la **impedancia térmica** del muro de termoarcilla de 29 cm, con los obtenidos para el muro multicapa recogido en la tabla nº3. Se observa una gran mejora en el amortiguamiento y desfase de la onda térmica respecto a los obtenidos en este tipo de muros.

<sup>5</sup> Esto es consecuencia de que la aproximación utilizada para la obtención de las ecuaciones [1] y [2] es de orden 3, y el modelo AERO utiliza una malla de 40 elementos. A valores bajos de  $\omega RC$  dominan los términos de orden inferior, los cuales están recogidos en las ecuaciones teóricas.

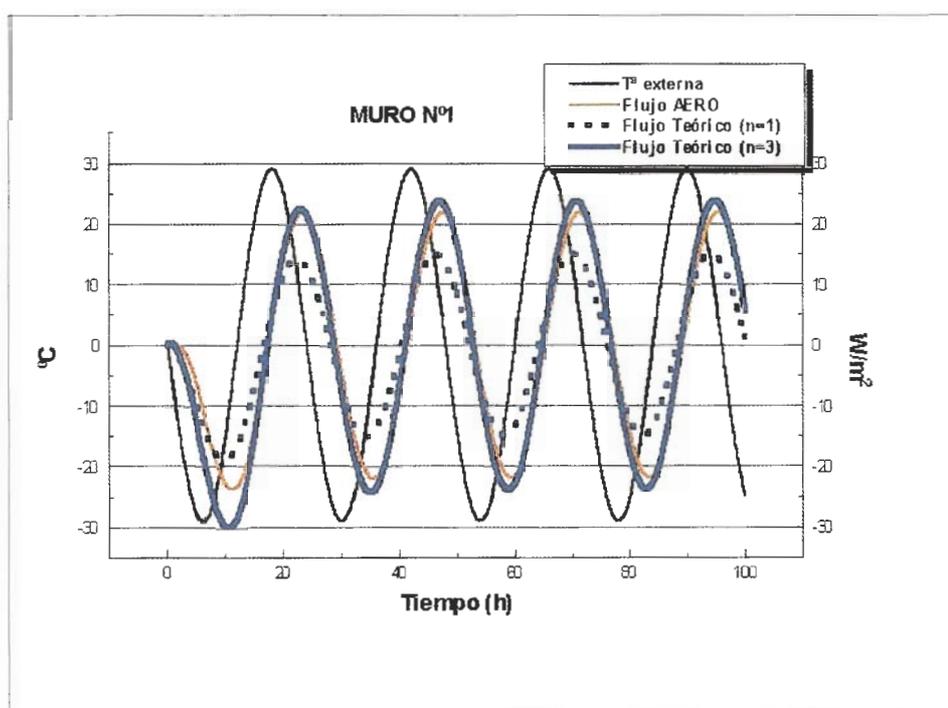


Figura nº3. Respuesta del muro nº1 (Termoarcilla 14 cm.)

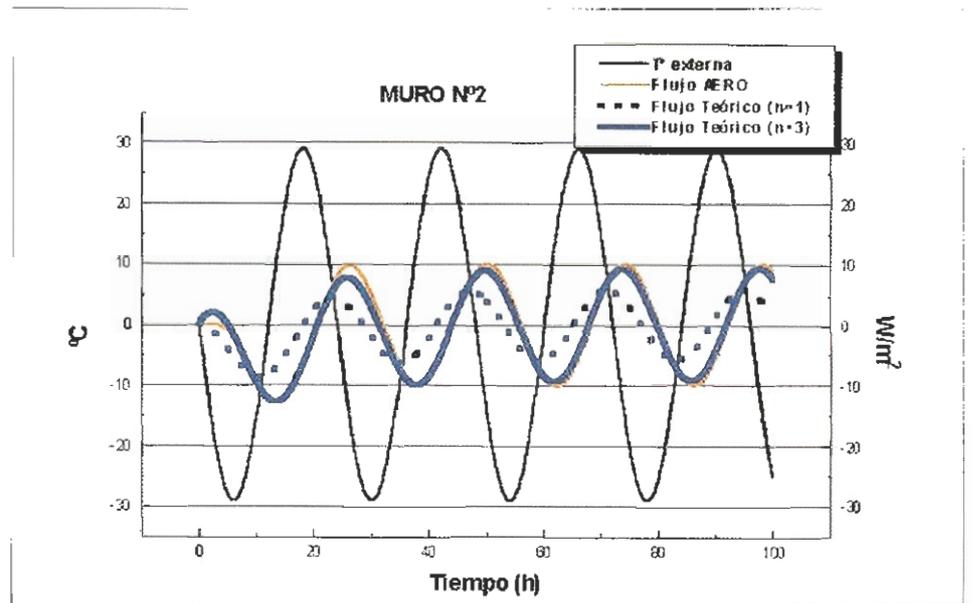


Figura n°4. Respuesta del muro n°2 (Termoarcilla 14 cm.)

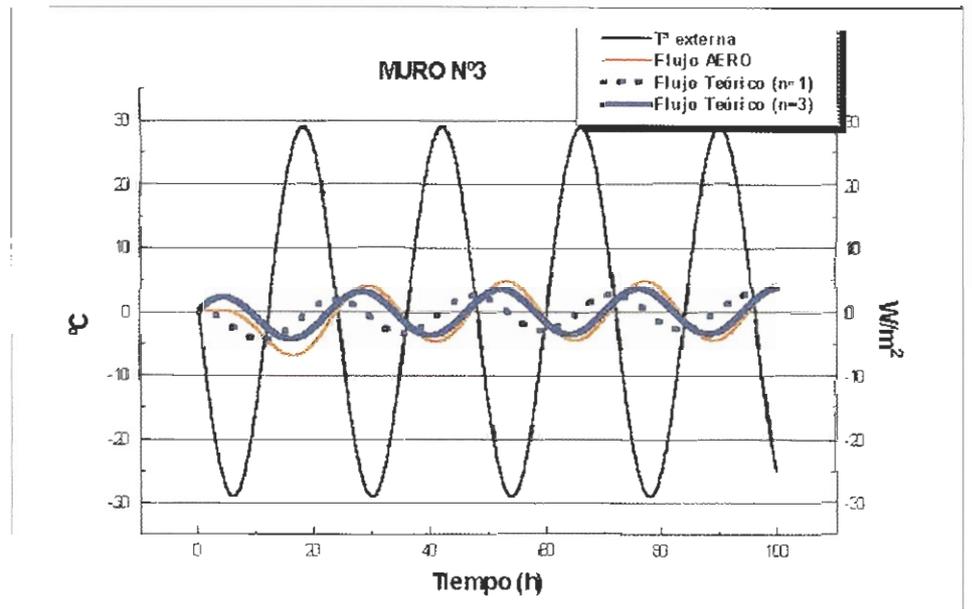


Figura n°5. Respuesta del muro n°3 (Termoarcilla 24 cm.)

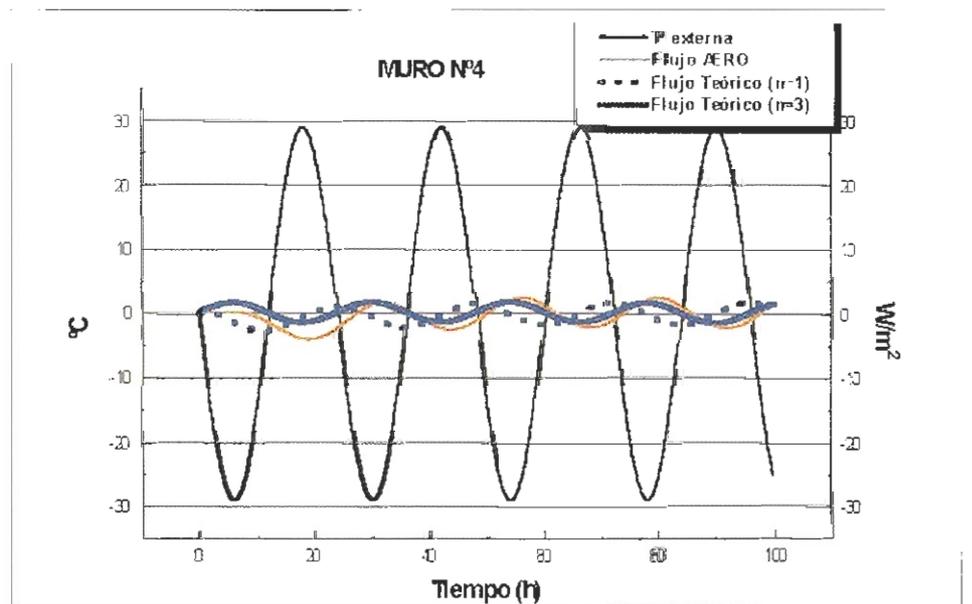


Figura n°6. Respuesta del muro n°4 (Termoarcilla 29 cm.)

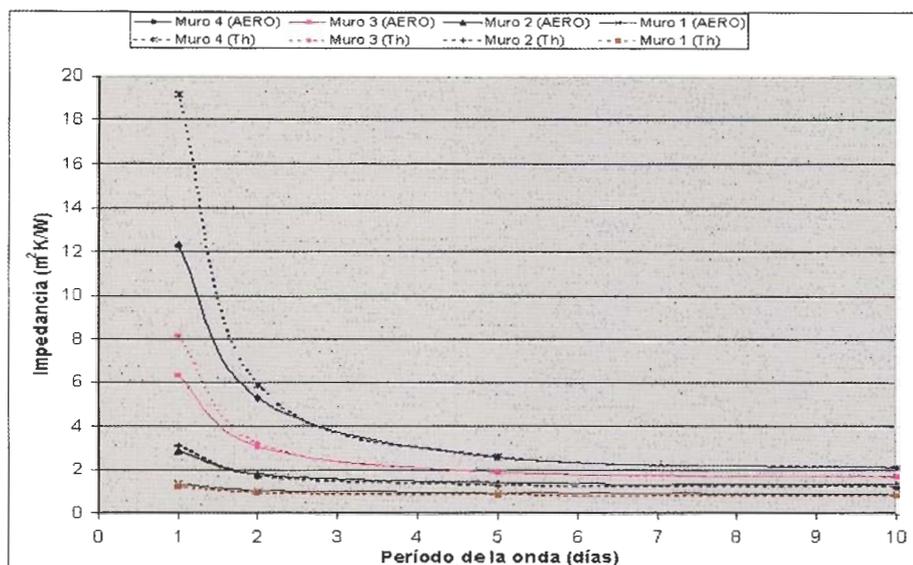


Figura nº7. Variación del módulo de la impedancia térmica con el período de la onda térmica, para los cuatro cerramientos, obtenida aplicando la expresión teórica (n=3) y el método AERO (n=40).

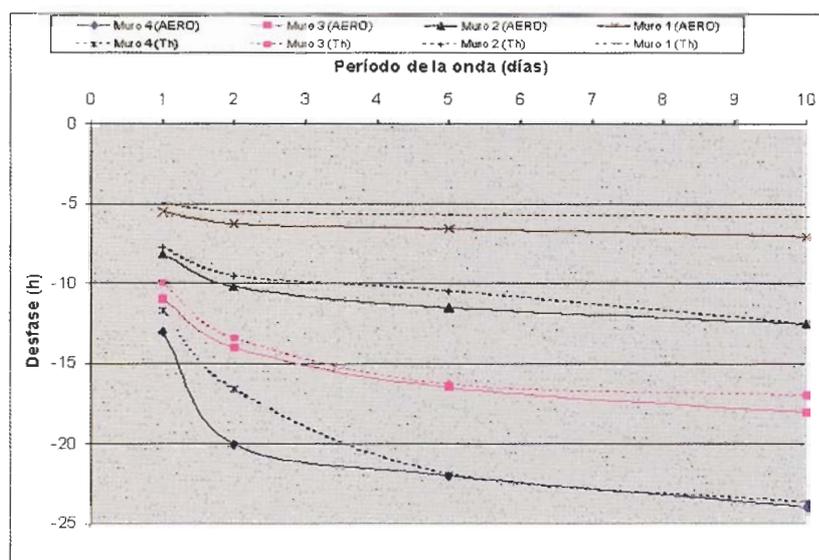


Figura nº8. Desfase de la onda térmica para los cuatro cerramientos, aplicando la expresión teórica (n=3) y el método AERO (n=40).

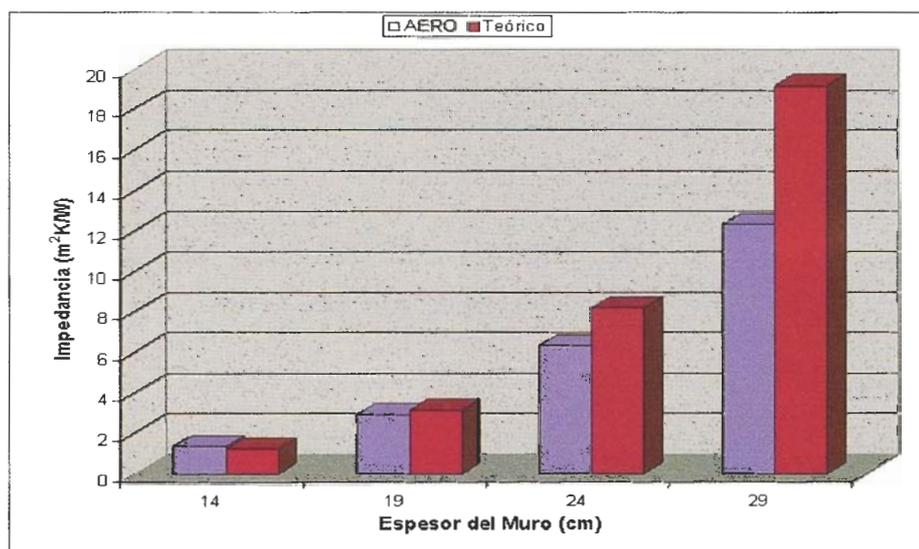


Figura nº9. Comparación de los resultados obtenidos en el módulo de la impedancia térmica, para una onda de un día, mediante los métodos teórico y analógico.

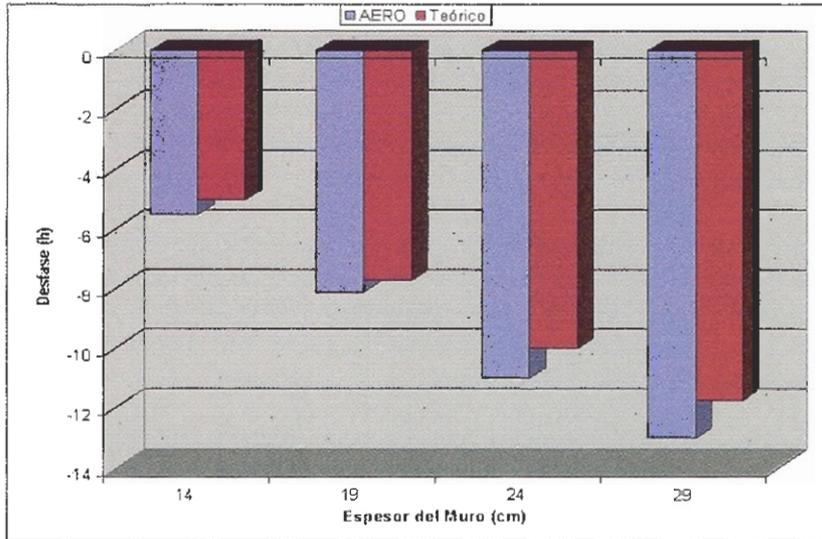


Figura nº10. Comparación de los resultados obtenidos en el módulo y la fase de la impedancia térmica, para una onda de un día, mediante los métodos teórico y analógico.

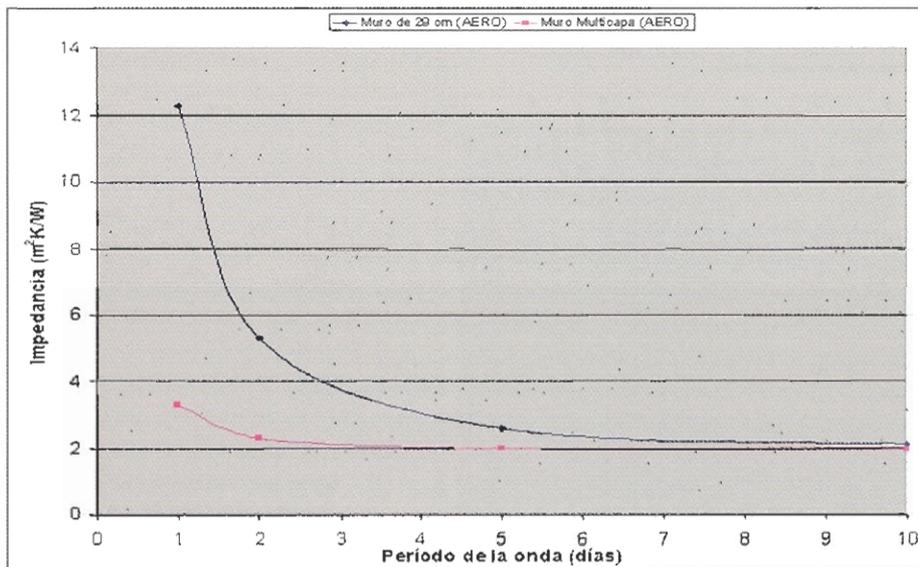


Figura nº11. Variación del módulo de la impedancia térmica con el período de la onda térmica, para el muro de Termoarcilla de 29 cm y el recogido en la tabla 3.

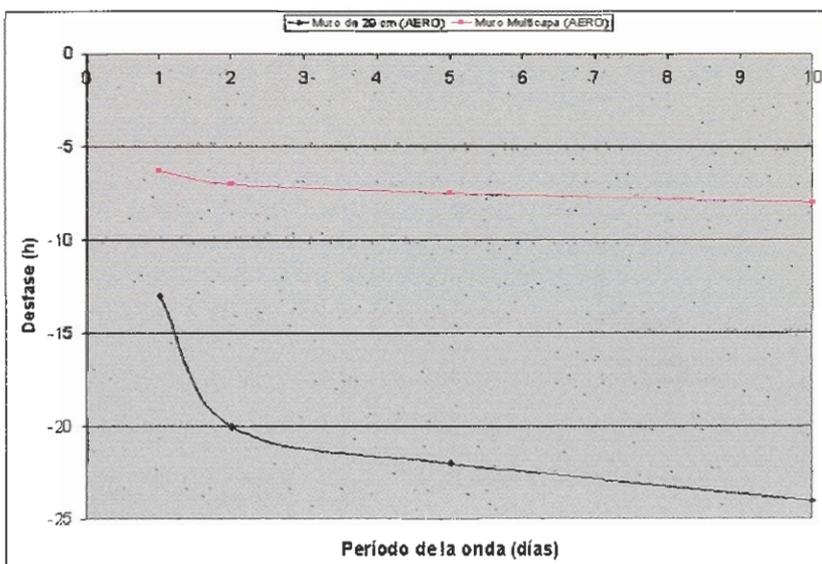


Figura nº12. Variación de la fase de la impedancia térmica con el período de la onda térmica, para el muro de Termoarcilla de 29 cm y el recogido en la tabla 3.

En la Tabla nº4 se muestran las variaciones en el módulo y la fase de la impedancia de los 4 muros al aumentar un 20% su capacidad, manteniendo fijo el producto RC. Se observa que, como cabría esperar de la expresión teórica, la fase permanece inalterada mientras que la impedancia sufre una disminución del orden del  $16.4 \pm 0.7$  %. Efectivamente, según la ecuación [1], si RC = constante, se cumple:

$$\Delta Z/Z = \Delta R/R = -16.7 \%$$

Por lo tanto, la incertidumbre observada debe estar asociada a la pérdida de precisión por redondeo en el cálculo de C, R y Z. En cuanto al método AERO, se obtiene una variación en la impedancia de  $15 \pm 3$  %. Aquí la incertidumbre es intrínseca al truncamiento de los datos en la obtención de la curva de respuesta, a partir de la cuál se calcula Z como cociente entre las amplitudes.

Muro	T (días)	AERO		TEÓRICO		AERO		TEÓRICO		$\Delta Z/Z$ (%)	
		Z (m <sup>2</sup> ·K/W)	- $\delta$ (h)	Z (m <sup>2</sup> ·K/W)	- $\delta$ (h)	Z (m <sup>2</sup> ·K/W)	- $\delta$ (h)	Z (m <sup>2</sup> ·K/W)	- $\delta$ (h)	AERO	TEÓRICO
		Muro normal				20 % mas pesado					
1	1	1,35	-5,5	1,22	-5	1,2	-5,5	1,02	-5	-11.1	-16.4
	2	1,05	-6,2	0,93	-5,5	0,9	-6,2	0,77	-5,5	-14.3	-17.2
	5	0,95	-6,5	0,84	-5,7	0,8	-6,5	0,7	-5,7	-15.8	-16.7
	10	0,90	-7,0	0,82	-5,8	0,75	-7,0	0,69	-5,8	-16.7	-15.9
2	1	2,9	-8,1	3,13	-7,7	2,6	-8,1	2,61	-7,7	-10.3	-16.6
	2	1,8	-10,2	1,72	-9,5	1,5	-10,2	1,44	-9,5	-16.7	-16.3
	5	1,4	-11,5	1,29	-10,5	1,15	-11,5	1,08	-10,5	-17.9	-16.3
	10	1,3	-11,0	1,23	-10,7	1,4	-11,0	1,02	-10,7	-15.4	-17.
3	1	6,3	-11,0	8,18	-10	5,7	-11,0	6,81	-10	-9.5	-16.7
	2	3,1	-14,0	3,26	-13,4	2,6	-14,0	2,72	-13,4	-16.1	-16.6
	5	1,9	-16,5	1,88	-16,3	1,6	-16,5	1,57	-16,3	-15.8	-16.5
	10	1,7	-18,0	1,66	-17	1,4	-18,0	1,39	-17	-17.6	-16.3
4	1	12,3	-13,0	19,18	-11,7	11,0	-13,0	15,98	-11,7	-10.6	-16.7
	2	5,3	-20,0	5,87	-16,6	4,3	-20,0	4,89	-16,6	-18.9	-16.7
	5	2,6	-22,0	2,62	-21,9	2,15	-22,0	2,18	-21,9	-17.3	-16.8
	10	2,1	-24,0	2,1	-23,7	1,8	-24,0	1,75	-23,7	-14.3	-16.7

Tabla nº4. Coeficientes de la respuesta de los 4 cerramientos originales y un 20% más pesados, a una onda térmica de un día, aplicando la expresión teórica y el método AERO.

En la figura nº13 se representa la respuesta del cerramiento multicapa cuyas características vienen dadas en la tabla nº2. En ella se observa la gran dependencia que ofrece la **impedancia térmica** de un cerramiento, respecto al orden relativo de sus componentes elementales. Cuando el aislamiento se sitúa en el frente exterior del muro el módulo de la **impedancia térmica** aumenta un 250%, mientras que la fase apenas se ve afectada. El aumento observado en la fase es del orden del 7% (17).

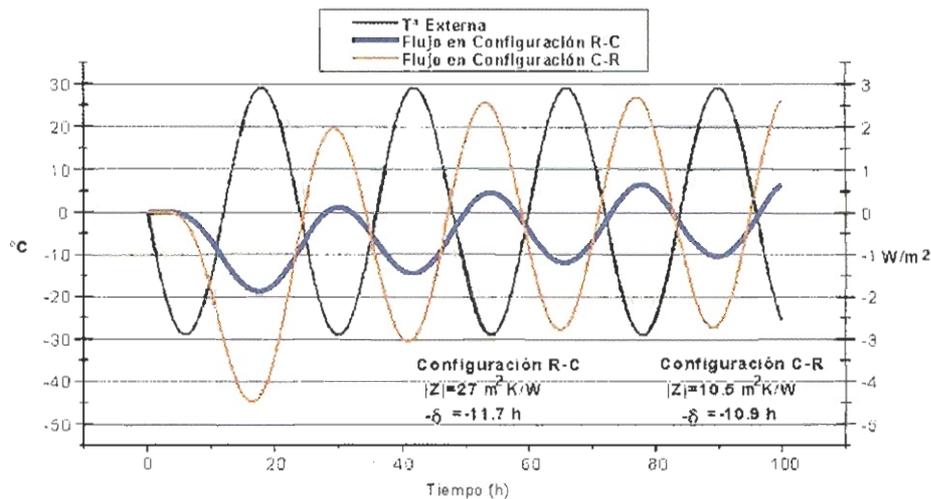


Figura 13. Temperatura externa y flujo de calor a la salida del cerramiento, permutando el orden de los elementos aislantes y capacitivos en el muro definido en la tabla nº2.

Se puede resumir lo siguiente:

A la hora de estudiar el comportamiento térmico de cerramientos en régimen variable, se puede utilizar el símil eléctrico considerando que el muro está formado por una red de elementos RC. La precisión de los resultados obtenidos dependerá del número de éstos utilizados en la modelización.

El estudio de la transmisión de calor en régimen variable no debe ser abordado únicamente con el coeficiente global de transmisión. Es conveniente utilizar la **impedancia térmica**, llamada así por su similitud a la eléctrica, y que definimos como el cociente entre la diferencia de temperatura entre las superficies del muro en un instante dado y el flujo de calor que sale del medio en ese mismo instante. En el caso de medios no capacitivos coincide con la resistencia térmica. En el caso contrario nos proporciona un desfase entre las ondas de  $T^p$  y de flujo calorífico, y una mejora considerable en la amplitud respecto a la que se obtendría en régimen permanente.

Tanto en muros *homogéneos* como *multicapa* sometidos a ondas periódicas, el calor que dejan pasar y el desfase de éste respecto a la onda de entrada, dependen de la frecuencia y del producto RC. Este hecho es más destacable en los muros de *Termoarcilla* que en los cerramientos comúnmente empleados en la construcción española.

En el caso de un muro multicapa, puede ser un ejercicio teórico calcular la impedancia y el desfase de cada uno de los elementos y después proceder a su "composición" (12), o se pueden emplear otras técnicas, como (13,14), o la empleada por nosotros de la analogía eléctrica resuelta con ordenador. En cualquiera de los casos se verá que no se trata de una suma conmutativa de resistencias, sino que influye el orden relativo. En el caso muy habitual de muros con capas de comportamiento aislante y capacitivo muy diferenciadas, como el muro representado en la tabla nº2, se obtiene un desfase parecido, pero unas impedancias muy diferentes. Como se puede ver en este caso el aislamiento por el exterior es mucho mejor que por el interior.

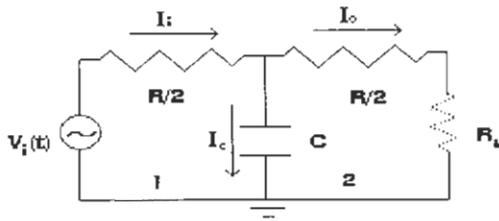
## 5. CONCLUSIONES.

- La *impedancia térmica* de cerramientos debe sustituir al coeficiente global de transmisión.
- Tanto el módulo como la fase de la impedancia son funciones del producto RC y de la frecuencia de la onda.
- El comportamiento térmico de un muro *multicapa* no es conmutativo, sino que la respuesta depende del orden relativo de sus componentes. Se ha demostrado que se comporta mejor con el aislamiento por el exterior.
- Es un hecho a destacar que el comportamiento térmico en régimen variable de los muros homogéneos de *Termoarcilla* (de mayor espesor) es, por lo general, mucho mejor que el de los cerramientos que se vienen empleando habitualmente en la construcción española, aunque en régimen permanente no lo sea.

Se considera que el concepto que se presenta, el cual se mencionó por primera vez en la tesis de J.A. Carrasco (1), y al que le se le da aquí una expresión teórica para un caso sencillo, es generalizable para otros más complejos, pudiendo jugar un importante papel en la comprensión del comportamiento de los cerramientos en condiciones reales, y servir de base para la búsqueda de nuevos sistemas constructivos que permitan un mejor aprovechamiento de la energía.

## ANEXO I

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura nº1:



$$I_i = I_c + I_o \quad [1]$$

$$\text{Malla 1)} \quad V_i(t) = I_c \frac{R}{2} + \frac{1}{C} \int I_c dt \quad [2]$$

$$\text{Malla 2)} \quad \frac{1}{C} \int I_c dt = I_o \left( \frac{R}{2} + R_L \right) \quad [3]$$

Figura nº1. Circuito equivalente simplificado de un muro homogéneo.

Suponiendo  $R \gg R_L$ , si resolvemos  $V_i(t)$  en función de  $I_o(t)$  se obtiene la siguiente ecuación

$$V_i(t) = R I_o(t) + \frac{R^2 C}{4} \frac{d I_o(t)}{dt} \quad [4]$$

$$I_o(0) = 0$$

diferencial:

$$I_o^h(t) = A e^{-A t / RC} \quad [5]$$

La solución de la ecuación homogénea (término transitorio):

siendo "A" una constante a determinar.

$$\hat{V}_i(t) = V_p \cdot e^{j\omega t} \quad [6]$$

El término estacionario se obtiene ensayando una solución particular de la ecuación gene-

$$\hat{I}_o(t) = \frac{V_p}{\hat{Z}} e^{j\omega t} \quad [7]$$

$$\hat{Z} = |Z| e^{j\delta} \quad [8]$$

ral. Sea  $V_i(t) = V_p \cdot \cos(\omega t)$  (donde  $V_p$  y  $\omega$  son, respectivamente, la amplitud y la frecuencia de la señal de entrada) la parte real de la función:

la solución particular tendrá la forma:

siendo Z una constante compleja, denominada *impedancia del circuito*, que caracteriza la respuesta de un sistema a una señal variable en el tiempo.

$$V_p = R \frac{V_p}{\hat{Z}} + \frac{R^2 C}{4} \frac{V_p}{\hat{Z}} (j\omega) \quad [9]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se llega a la siguiente expresión para la impedancia:

$$\hat{Z} = R + j \frac{\omega R^2 C}{4} \quad [10]$$

$$|Z| = R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega RC}{4}\right)^2} \quad \delta = \text{Arc tg}\left(\frac{\omega RC}{4}\right)$$

despejando se obtiene:

$$\hat{I}_o(t) = \frac{V_p}{|Z|} e^{j(\omega t - \delta)} \quad [11]$$

$$I_o(t) = \frac{V_p}{|Z|} \left( \cos(\omega t - \delta) - \cos(\delta) e^{-4t/RC} \right) \quad [12]$$

y la corriente de salida:

tomando la parte real y aplicando la condición inicial, se obtiene:

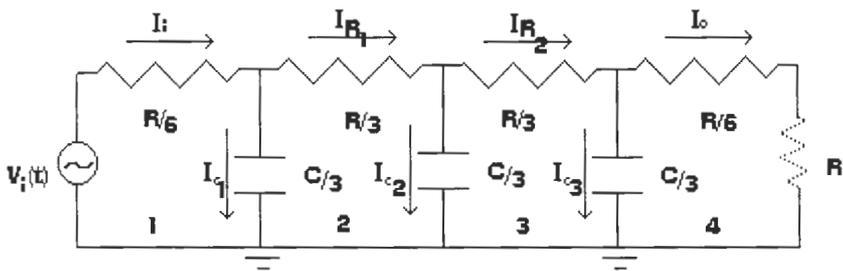


Figura nº2. Circuito equivalente de un muro homogéneo. Aproximación de orden 3.

$$\text{Malla 1)} \quad V_i(t) = I_i \frac{R}{6} + \frac{I_{C1}}{j\omega C/3}; \quad I_i = I_{C1} + I_{R1} \quad [13]$$

$$\text{Malla 2)} \quad \frac{I_{C1}}{j\omega C/3} = I_{R1} \frac{R}{3} + \frac{I_{C2}}{j\omega C/3}; \quad I_{R1} = I_{C2} + I_{R2} \quad [14]$$

$$\text{Malla 3)} \quad \frac{I_{C2}}{j\omega C/3} = I_{R2} \frac{R}{3} + \frac{I_{C3}}{j\omega C/3}; \quad I_{R2} = I_{C3} + I_o \quad [15]$$

$$\text{Malla 4)} \quad \frac{I_{C3}}{j\omega C/3} = I_o \left( \frac{R}{6} + R_L \right) \quad [16]$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura nº2:

Eliminando las IR se obtiene un sistema diagonal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (IC1, IC2, IC3 e Io). Sustituyendo de forma sucesiva, suponiendo  $R \gg R_L$  se llega a la siguiente expresión en Io:

$$V_i(t) = R \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\omega RC}{9} \right)^2 + \frac{j}{12} \left( 19 \left( \frac{\omega RC}{9} \right) - \left( \frac{\omega RC}{9} \right)^3 \right) \right] I_o(t) \quad [17]$$

6 Aplicando el teorema de Thevenin también se llega a las ecuaciones [10], [18] y [19]

quedando:

$$|Z| = R \sqrt{\left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega RC}{9}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{1}{12} \left(19 \left(\frac{\omega RC}{9}\right) - \left(\frac{\omega RC}{9}\right)^3\right)\right]^2} \quad [18]$$

$$\delta = \text{Arc tg} \left( \frac{\frac{1}{3} \left(19 \left(\frac{\omega RC}{9}\right) - \left(\frac{\omega RC}{9}\right)^3\right)}{4 - \frac{8}{3} \left(\frac{\omega RC}{9}\right)^2} \right) \quad [19]$$

## ANEXO II

Para la simulación de un muro homogéneo mediante el método AERO, se ha utilizado la malla de la figura nº1. Se trata de una red eléctrica constituida por  $N$  nodos,  $Nr$  resistencias  $R_k$ ,  $Ncap$  condensadores  $C_k$ , una tensión variable de entrada  $V_i(t)$  y una resistencia de carga  $R_L$ , donde:

$$R_k = R / Nr \quad \text{desde } k = 1 \text{ hasta } k = Nr$$

$$C_k = C / Ncap \quad \text{desde } k = 1 \text{ hasta } k = Ncap$$

$$V_i(t) = V_o \cos(\omega t)$$

$$R_L = 1 / h$$

siendo, respectivamente,  $R$  y  $C$ , la resistencia térmica (en  $m^2 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$ ) y la capacidad calorífica (en  $\text{J} / m^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ) totales del cerramiento;  $V_o$  y  $\omega$ , la amplitud (en  $^\circ\text{C}$ ) y la frecuencia (en  $\text{rad/s}$ ) de la onda térmica; y  $h$  el coeficiente de película (en  $\text{W} / m^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ) de la cara interna del muro.

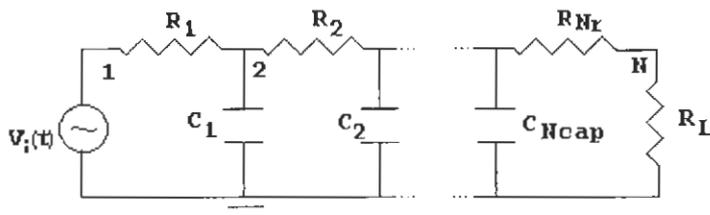


Figura nº1. Representación esquemática de la malla eléctrica empleada en el establecimiento del modelo analógico de un muro homogéneo.

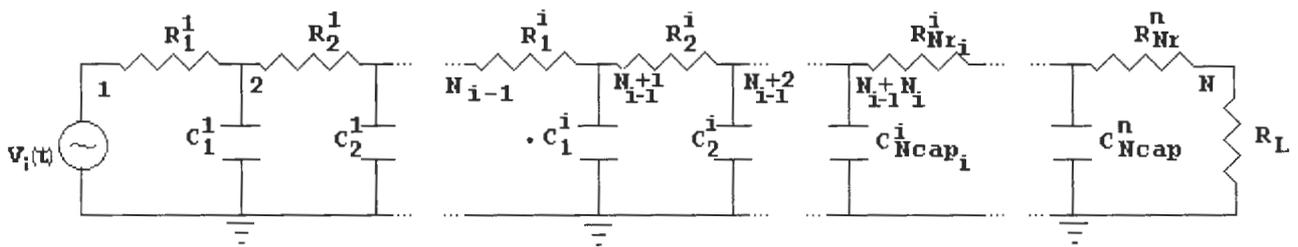
Para la simulación de un muro multicapa mediante el método AERO, se ha empleado la malla de la figura nº2. En esta nueva red eléctrica quedan recogidos los  $n$  diferentes elementos que componen el muro. De esta forma el elemento  $i$  de  $n$  estará representado por una parte de la malla, compuesta por  $N_i$  nodos,  $Nr_i$  resistencias  $R_k^i$ ,  $Ncap_i$  condensadores  $C_k^i$ , una tensión variable de entrada  $V_i(t)$  y una resistencia de carga  $R_L$ , donde:

$$R_i^k = R_i / Nr_i \quad \text{desde } i = 1 \text{ hasta } i = n, \quad k = 1 \text{ hasta } k = Nr_i$$

$$C_i^k = C_i / Ncap_i \quad \text{desde } i = 1 \text{ hasta } i = n, \quad k = 1 \text{ hasta } k = Ncap_i$$

$$V_i(t) = V_o \cos(\omega t)$$

$$R_L = 1/h$$



Siendo  $R_i$  y  $C_i$  la resistencia térmica y la capacidad calorífica asociadas al componente  $i$  constitutivo del muro.

Figura nº2. Representación esquemática de la malla eléctrica empleada en el establecimiento del modelo analógico de un muro heterogéneo.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- 1) **J.A. Carrasco.** "Aprovechamiento de la inercia térmica en el ahorro de energía". Tesis Doctoral. Instituto Químico de Sarriá (1982).
- 2) **M. Domínguez, J.A. Carrasco, S. García de Vinuesa.** "Economie d'Énergie dans le Bâtiments en Profitant de l'Inertie Thermique". I. I. F. Comision E-1, págs. 75-83. París (1983).
- 3) **J.A. Carrasco; M. Domínguez, J.M. Díaz.** "La Impedancia Térmica de los Cerramientos". Montajes e Instalaciones, nº181, págs. 23-30. (1986).
- 4) **M. Domínguez, I. Álvarez, P.P. Sanz.** "Diseño con Ordenador de Muros Filtro de Ondas Térmicas, a través de la Impedancia Térmica". Ponencias del III Congreso Ibérico y I Congreso Iberoamericano de Energía Solar. Madrid, España. Abril (1987).
- 5) **G. Lamé, B.P. Clapeyron.** *Ann. Chem. Phys.* 47, 250-256 (1831).
- 6) **F. Mattarolo.** "Analogía Eléctrica in Problemi di Transmissione del Calore in Regime Variabile".- Scritti in onore del Prof. Balbino del Nunzio. Padova, (1963).
- 7) **Millman y Halkias.** "Dispositivos y Circuitos Electrónicos".
- 8) **M. Domínguez.** "Analogía Eléctrica con Ordenador". Refrigeración-Frial, 12, 23, 29, 1989.
- 9) **M. Domínguez, J.M. Arias, C. García, V.M. Barragán.** "Solution of Heat Transmission Equation Including the Phase Change through Computerized Electrical Analogy". Meeting of the International Institute of Refrigeration. Centre National de la Recherche Scientifique. (C.N.R.S.). Université de París Sud. Orsay 21 au 23 Octobre. (1998).
- 10) **M. Domínguez, D. García, J.M<sup>a</sup>. Arias, J. Culubret.** "Simulación de Procesos de Transmisión de Calor, incluido el Cambio de Fase y la Convección". V Conferencia Iberoamericana sobre Equilibrio entre Fases para el Diseño de Procesos. Vigo. Junio (1999).
- 11) **M. Domínguez, D. García, C. García, F. González.** "Posibilidades del Método de Analogía Eléctrica Resuelta con Ordenador en la Resolución de Problemas de Transmisión de Calor, incluida la Convección Forzada". XXVII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física, 9º Encuentro Ibérico para la Enseñanza de la Física. Valencia. Septiembre (1999).
- 12) **M. Domínguez, O. Herrera, I. Álvarez.** "Resolución de la Ecuación de Transmisión de Calor en Muros Multicapa, aplicando la Impedancia Térmica". Publicación interna del Instituto del Frío, págs. 1-15. Madrid. (1985)
- 13) **O. Herrera, I. Álvarez, M. Domínguez.** "Resolución de la Transmisión de Calor de Muros Multicapa mediante el Método del Cuadripolo". Publicación interna del Instituto del Frío. Madrid, (1985).
- 14) **I. Álvarez, O. Herrera, M. Domínguez.** "Resolución de la Transmisión de Calor de Muros Multicapa mediante el Método de Redes". Publicación interna del Instituto del Frío. Madrid, (1985).
- 15) **J. A. Carrasco, S. García de Vinuesa M. Domínguez.** "Influencia de las Propiedades, Posición Relativa de los Elementos y la Frecuencia Perturbadora en el Comportamiento Térmico de Muros". El Instalador, Nº181, págs. 75-83. (1983).
- 16) **M. Domínguez, J. A. Carrasco, J. M. Díaz.** "Thermal Inertia as an Energy Source in Cold Stores". Proceedings of the 1986 International Congress on Renewable Energy Resources (C.S.I.C.). Vol. II. Madrid, Spain. 18-23 May. (1986).
- 17) **J. A. Carrasco, M. Domínguez, S. García de Vinuesa.** "Análisis de la Resistencia Térmica Real de Cerramientos". Ponencia presentada a Electrotérmia 84. Zaragoza. (1984).